



DOI 10.28925/2663-4023.2025.31.949

УДК 04.032.26:658.8

Харченко Олександр Анатолійович

кандидат технічних наук, доцент

доцент кафедри інженерії програмного забезпечення та кібербезпеки

Державний торговельно-економічний університет, м. Київ, Україна

ORCID: 0000-0002-9255-9287

a.kharchenko@knute.edu.ua

Яремич Валентин Романович

аспірант кафедри інженерії програмного забезпечення та кібербезпеки

Державний торговельно-економічний університет, м. Київ, Україна

ORCID: 0000-0001-9557-9577

v.yaremych@knute.edu.ua

МОДЕЛЬ ІГРОВОЇ ВЗАЄМОДІЇ ПІДПРИЄМСТВ E-COMMERCE З МЕРЕЖЕВИМИ ЗОВНІШНІМИ ЕФЕКТАМИ

Анотація. У статті представлено комплексну модель ігрової взаємодії підприємств на ринку електронної комерції (e-commerce). Модель функціонує в умовах мережових зовнішніх ефектів. Актуальність дослідження зумовлена насиченістю ринку e-commerce IT-рішеннями та великою кількістю взаємопов'язаних учасників. А це вимагає розробки гнучких та реалістичних інструментів для кібернетичного моделювання та аналізу конкурентоспроможності. Головним елементом моделі є інтеграція теорії ігор та методів машинного навчання (МН). На відміну від поширених класичних моделей, які базуються на припущенні про ідеальну раціональність гравців, у дослідження застосовано концепцію обмеженої раціональності через механізм імовірнісних стратегій Quantal Response Equilibrium (QRE). Запропонований підхід дозволив адекватно моделювати поведінку компаній e-commerce. Оскільки ці компанії прагнуть до вигоди, але ухвалюють рішення в умовах неповної інформації та обмежених ресурсів. А ці обмеження апіорі роблять їхні дії не завжди оптимальними. Кожне підприємство розглядається як агент. Агент в моделі обирає вектор стратегії, який включає ціну, якість, інтенсивність маркетингу та інвестиції в R&D. Наукова новизна моделі полягає у формалізації та об'єднанні кількох ключових параметрів. По-перше, розроблено інтегрований індекс конкурентоспроможності (CS_{it}), який, на відміну від класичних фінансових метрик, враховує синергію чотирьох факторів. Це, відповідно, економічний результат (очікуваний прибуток), структурна значущість підприємства в мережі взаємодій (вага критичності), робастність його стратегії до ринкових збурень та інноваційний потенціал. Останній оцінювався за динамікою інвестицій у R&D. По-друге, стан рівноваги в системі описано не класичною рівновагою Неша, а через більш загальний апарат варіаційних нерівностей. Це дозволило коректно враховувати опуклі функції витрат та регуляризаційні елементи. По-третє, застосування алгоритмів машинного навчання дало змогу калібрувати параметри моделі на основі емпіричних даних. А це перетворює модель на інструмент для прогнозування та управлінського аналізу компаній на ринку e-commerce. Розроблено алгоритм навчання моделі, представлений у вигляді блок-схеми та псевдокоду.

Ключові слова: електронна комерція; теорія ігор; машинне навчання; конкурентоспроможність; індекс конкурентоспроможності; обмежена раціональність; рівновага Quantal Response (QRE); математична модель.



ВСТУП

Як показано у чисельних дослідженнях [1, 2], ринок електронної комерції (або далі в тексті, відповідно, e-commerce) характеризується насиченістю ІТ. А також великою кількістю взаємопов'язаних учасників.

У нашій постановці “раціональність” не означає ідеальну безпомилковість чи повну інформованість гравця. Навпаки, в моделі введено елементи регуляризації. А також ймовірнісні стратегії (Quantal Response). Ці стратегії відобразять обмежену раціональність. Тобто, компанії не завжди діють абсолютно оптимально. Але їхні рішення все ж підкорені певній логіці. Це прагнення до вигоди. Для досягнення завдань дослідження модель, яку подано далі, інтегрує два підходи. По перше – це ігрова модель стратегічної взаємодії. Це дозволяє формально визначити рівноважні стратегії підприємств e-commerce у середовищі з мережевими зовнішніми ефектами. Відповідно, враховуючи як витрати, так і потенційні вигоди від різних стратегій. По друге – це алгоритмічний підхід на основі машинного навчання (МН). Тобто МН дає змогу коригувати параметри моделі відповідно до емпіричних даних конкретних підприємств. Це додатково забезпечує варіативність оцінок ефективності підприємств у часі. Завдяки цьому модель не є статичною.

Постановка проблеми. Міжнародний та український ринок електронної комерції – це складна система. І в останні роки ця система характеризується насиченістю інформаційними технологіями. В таких умовах адекватне моделювання стратегічної взаємодії підприємств для оцінки їхньої конкурентоспроможності стає релевантним науково-практичним завданням. Проте, чинні підходи моделювання показників конкурентоспроможності стикаються з низкою обмежень. А це знижує їхню релевантність та прогностичну цінність. Зокрема, проблема полягає у надмірно жорстких припущеннях класичних економічних моделей щодо раціональності агентів (підприємств у сфері e-commerce). Це обумовлено, ти, що в e-commerce, підприємства ухвалюють рішення в умовах неповної інформації, обмежених ресурсів та невизначеності. А отже їхня поведінка є лише наближено раціональною, із закономірними відхиленнями від оптимальних стратегій. Відповідно ігнорування цього фактору та аналіз рішень без урахування ймовірнісної природи вибору та реакцій конкурентів призведе до некоректних висновків. Також маємо складності пов'язані з обмеженістю існуючих метрик для вимірювання конкурентоспроможності. Переважна частина з них фокусується або на суто фінансових показниках, таких як прибутковість чи частка ринку, або на якісних експертних оцінках. Це позбавляє ці метрики об'єктивності та формалізації. Також однобічний підхід не враховує всі властивості успішності компанії на ринку e-commerce. Отже, виникає наукова проблема, яка полягає у необхідності розробки інтегрованого підходу до моделювання та оцінки конкурентоспроможності підприємств e-commerce. Такий підхід має, з одного боку, базуватися на більш реалістичних припущеннях про поведінку агентів (обмежена раціональність). А з іншого пропонувати комплексну й багатокomпонентну метрику для оцінки. Це поєднає всі аспекти діяльності підприємств e-commerce при кібернетичному аналізі конкурентоспроможності.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Аналіз наукових праць [1-10] засвідчив про значний інтерес дослідників до застосування математичних методів для вивчення ринку електронної комерції. Фундаментальною основою для моделювання стратегічних взаємодій є теорія ігор. Основи та приклади застосування якої в економіці та менеджменті висвітлені у роботах [11, 13-17]. Класичні підходи до моделювання



поведінки учасників ринку, здебільше [18-30] спираються на концепції раціональних агентів, які адаптовані для аналізу поведінки покупців і продавців у системах e-commerce. Зокрема, апарат теорії ігор активно використовується для аналізу специфічних завдань, таких як оцінка кредитних ризиків та синтез механізмів регулювання на платформах. Іншим релевантним напрямом є дослідження конкурентоспроможності [1-9, 20-27]. Цей параметр досліджується зокрема у рамках стратегічних програм та безпосередньо в секторі e-commerce, де автори аналізують фактори впливу, конкурентоспроможність ланцюгів постачання та пропонуються інтегровані підходи до її вимірювання.

Водночас аналіз літератури [1-31] виявляє певну прогалину. Більшість ігрових моделей спираються на класичні припущення про повну раціональність. Тоді як моделі оцінки конкурентоспроможності обмежуються фінансовими метриками або якісними оцінками. Попри наявність робіт, присвячених ризикам та структурі українського ринку e-commerce, бракує комплексних моделей, які б інтегрували обмежену раціональність агентів, мережеві ефекти та багатокомпонентний індекс конкурентоспроможності в єдину адаптивну систему.

Мета статті. Метою статті є розробка та формалізація комплексної математичної моделі для оцінки конкурентоспроможності підприємств у сфері електронної комерції.

Для досягнення цієї мети вирішуються наступні завдання:

- Інтегрувати концепції теорії ігор, мережевого аналізу та методів машинного навчання в єдиний формалізований підхід та розробити модель стратегічної взаємодії, яка враховує обмежену раціональність агентів через механізм імовірнісних стратегій Quantal Response Equilibrium (QRE).
- Сформулювати інтегрований індекс конкурентоспроможності, який би поєднував економічні результати, структурну значущість підприємства e-commerce в мережі G_t , робастність його стратегії та інноваційний потенціал.
- Розробити алгоритм навчання моделі, що дозволяє калібрувати її параметри на основі емпіричних даних для підвищення її практичної та прогностичної точності для компаній.

ВИКЛАДЕННЯ ОСНОВНОГО МАТЕРІАЛУ

Кожне підприємство у нашій постановці розглядаємо як раціонального агента. Тобто агент приймає рішення, спрямовані на досягнення власних цілей. Передусім це збільшення прибутку та підвищення конкурентоспроможності. Агент робить це з урахуванням потенційних дій інших учасників ринку.

Далі щоб забезпечити аналітичний розгляд, введемо систему позначень та множин. Ці позначення опишуть наступні параметри та змінні, які ми використовуємо в статті: коло підприємств, що беруть участь у конкуренції; часову структуру спостереження та прийняття рішень; стратегічні змінні кожного підприємства. Це ціна, якість, маркетинг, інноваційні інвестиції тощо); структуру взаємодій між підприємствами. Задамо у вигляді зваженого графа; зовнішні параметри ринку, такі як місткість та екзогенні фактори.

Нехай:

$N = \{1, \dots, N\}$ – множина підприємств (агентів) у сфері e-commerce;

$T = \{1, \dots, T\}$ – дискретні моменти часу;



$G_t = \{V, E, W_t\}$ – зважений орієнтований або неорієнтований граф взаємодій у момент t ;

де $V = N, E \subseteq V \times V, W_t = [w_{ij,t}] \in \mathbb{R}_+^{N \times N}$.

Кожен агент $i \in N$ у момент $t \in T$ обирає вектор стратегії:

$$s_{i,t} = (p_{i,t}, q_{i,t}, a_{i,t}, r_{i,t}) \in S_i \subset \mathbb{R}^4, \quad (1)$$

де $s_{i,t}$ – стратегія агента i у момент t ; $p_{i,t} \in \mathbb{R}_+$ – ціна продукту/послуги; $q_{i,t} \in \mathbb{R}_+$ – рівень якості/сервісу; $a_{i,t} \in \mathbb{R}_+$ – інтенсивність маркетингу/реклами; $r_{i,t} \in \mathbb{R}_+$ – інвестиції у технології/R&D; S_i – опукла компактна множина допустимих стратегій агента i .

Нехай $x_{i,t} \in \mathbb{R}^d$ – вектор екзогенних характеристик фірми/ринку. Це для e-commerce – асортимент, логістика, регіон, тощо. А $M_t \in \mathbb{R}_+$ – місткість ринку в момент t .

Визначимо систематичну корисність (привабливість) пропозиції агента i у момент t :

$$v_{i,t} = \beta^T \cdot x_{i,t} - \alpha \cdot p_{i,t} + \gamma \cdot q_{i,t} + \delta \cdot a_{i,t} + \eta \cdot \sum_{j=1}^N w_{ij,t} \cdot q_{j,t}, \quad (2)$$

де $v_{i,t} \in \mathbb{R}$ – систематична корисність; $\beta \in \mathbb{R}^d$ – вектор коефіцієнтів чутливості до $x_{i,t}$ (тобто асортимент, логістика, регіон, тощо); $\alpha, \gamma, \delta, \eta \in \mathbb{R}_+$ – параметри чутливості до ціни, якості, маркетингу та мережевого ефекту відповідно; $w_{ij,t} \geq 0$ – вага впливу вузла j на i у графі G_t .

Для багатопродуктової моделі частку попиту агента [8, 9] i у момент t визначмо так:

$$share_{i,t} = \frac{\exp\{v_{i,t}\}}{\sum_{k=1}^N \exp\{v_{k,t}\}}, \quad (3)$$

де $share_{i,t} \in \mathbb{R}_+$ – частка попиту.

Тоді очікувана виручка агента i у момент t буде відповідати залежності (4):

$$R_{i,t} = M_t \cdot p_{i,t} \cdot share_{i,t}, \quad (4)$$

де $R_{i,t} \in \mathbb{R}_+$ – виручка; $M_t \in \mathbb{R}_+$ – місткість ринку.

Зазначимо, що будь-яка стратегія підприємства вимагає відповідних ресурсів для реалізації. Отже, рішення щодо зниження ціни, підвищення якості продукції, посилення маркетингових зусиль чи інвестування у технологічні інновації пов'язані з певними витратами. Логічно, що для коректного моделювання поведінки раціональних агентів нам необхідно не лише враховувати потенційні вигоди від обраних стратегій, але й формалізувати структуру витрат. Ці витрати обмежують потенціал підприємства. Насамперед в умовах подолання наслідків агресій з боку рф. Саме цим обумовлено, що у моделі витрати ми розглядаємо як зростаючі функції від стратегічних змінних. Це відповідає економічній інтуїції. Чим вищий рівень якості чи маркетингової активності обере підприємство, тим більшими є необхідні ресурси. Також, доцільно враховувати ефект зростаючих граничних витрат. З цією метою у моделі використовуємо опуклу квадратичну специфікації витрат. Такий вибір є математично зручним і економічно обґрунтованим. Згідно [10] опуклість гарантує єдиність мінімуму і забезпечить визначеність задачі оптимізації.

Відповідно до [9, 10] задаємо опуклу квадратичну специфікацію витрат:

$$C_{i,t}(v_{i,t}) = c_{0,i} + c_{p,i} \cdot p_{i,t}^2 + c_{q,i} \cdot q_{i,t}^2 + c_{a,i} \cdot a_{i,t}^2 + c_{r,i} \cdot r_{i,t}^2, \quad (5)$$

де $C_{i,t}: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}_+$ – функція витрат; $c_{0,i} \geq 0$ – постійні витрати агента i ; $c_{p,i}, c_{q,i}, c_{a,i}, c_{r,i}$ – коефіцієнти граничних витрат за напрямками p, q, a, r .



Введемо штраф за технологічну неузгодженість. Такий штраф, до прикладу, обумовлений показником високої якості але без достатніх інвестицій у R&D (Research and Development, дослідження та розробки). У нашій моделі інвестиції інтерпретуємо як рівень ресурсів, які підприємство спрямовує на R&D. Своєю чергою ці інвестиції прямо впливають на якість продукції чи послуг. Також вони знижують штраф за технологічну неузгодженість. Адже висока якість без відповідного R&D є економічно нестійкою [9].

Тоді на підставі робіт [8-10] отримаємо такий вираз:

$$\Omega_{i,t}(s_{i,t}) = \kappa_i (\max\{0, q_{i,t} - \phi_i \cdot r_{i,t}\})^2, \quad (6)$$

де $\Omega_{i,t}: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}_+$ – регуляризатор узгодженості; $\kappa_i > 0$ – вага штрафу; $\phi_i > 0$ – коефіцієнт технологічної підтримки якості інвестиціями в R&D.

Тоді чистий платіж агента i у момент t матиме такий вигляд:

$$U_{i,t}(s_t; \theta, G_t) = R_{i,t} - C_{i,t}(s_{i,t}) - \Omega_{i,t}(s_{i,t}), \quad (7)$$

де $U_{i,t} \in \mathbb{R}$ – платіж; $s_t = (s_{1,t}, \dots, s_{N,t}) \in S \equiv \prod_{i=1}^N S_i$ – профіль стратегій у момент часу t ; $\theta = (\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta, \{c\}, \{k_i\}, \{\phi_i\})$ – вектор усіх параметрів моделі.

Припускаємо, що допустима множина стратегій агента має такий вигляд:

$$S_i = \left\{ s_i \in \mathbb{R}^4 : p_{ni} \leq p_i \leq p_{vi}, q_{ni} \leq q_i \leq q_{vi}, a_{ni} \leq a_i \leq a_{vi}, r_{ni} \leq r_i \leq r_{vi} \right\}, \quad (8)$$

де p_{ni} та p_{vi} – нижні/верхні межі керованих змінних.

Зауважмо, що оскільки стратегічні змінні кожного підприємства впливають не лише на його власний результат, але й на результати інших учасників ринку, поведінка системи у сукупності визначиться взаємодією агентів. Саме тому, аналіз окремих рішень без урахування реакцій конкурентів є неповним. Це призводить до некоректних висновків. Отже, виникла необхідність ввести в модель поняття рівноваги гри [11]. Цей термін згідно [11] описує узгоджений стан системи, коли жоден з агентів не має стимулу односторонньо змінювати стратегію.

У класичному формулюванні таке положення зазвичай описують рівновагою Неша [11]. Проте для нашої моделі вважаємо доцільно використати більш загальний підхід. Пояснимо чому. Наш підхід дозволив у дослідженнях врахувати опуклість функцій витрат та виграшу. Також вважаємо за необхідне включити в модель регуляризаційні доданки. Ці доданки забезпечили при алгоритмічній та програмній реалізації узгодженість й робастність моделі. Всі ці доповнення далі використовуємо для дослідження застосування апарату варіаційних нерівностей при обчислювальному експерименті. Отже, спираючись на наведені судження, наступним кроком є формалізація рівноваги гри у вигляді варіаційної нерівності для регуляризованої опуклої гри.

Розглядаємо регуляризовану гру з функціоналом:

$$J_{i,t}(s_t; \theta, G_t) = -U_{i,t}(s_t; \theta, G_t) + \tau_i \psi_i(s_{i,t}), \quad (9)$$

де $J_{i,t}$ – мінімізована ціль агента i ; $\psi_i: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}_+$ – опуклий регуляризатор; $\tau_i > 0$ – інтенсивність регуляризації.

Визначення 1 (Регуляризована рівновага).

Профіль $s_t^* \in S$ є рівновагою, якщо для всіх i :

$$s_{i,t}^* \in \arg \min_{s_{i,t} \in S_i} J_{i,t}(s_{1,t}^*, \dots, s_{i,t}, \dots, s_{N,t}^*; \theta, G_t). \quad (10)$$

Нехай $F_t(s_t) = (\nabla_{s_{1,t}} J_{1,t}, \dots, \nabla_{s_{N,t}} J_{N,t})$. Тоді рівновага еквівалентна розв'язанню варіаційної нерівності

$$\langle F_t(s_t^*), s_t - s_t^* \rangle \geq 0, \quad \forall s_t \in S, \quad (11)$$

де $\langle \cdot \rangle$ – скалярний добуток у $\mathbb{R}^{4N}$.



Запроваджене вище формулювання рівноваги гри у вигляді варіаційної нерівності (11) дозволяє нам описати умови, за яких система стратегій підприємств досягає узгодженого стану.

Однак для того, щоб така модель мала не лише наукову, а й практичну цінність, як алгоритм та відповідна кібернетична реалізація, доведемо, що:

Для альтернативної інтерпретації введемо скінченні множини сіток:

$$S_i^{(h)} = \{s_i^{(1)}, \dots, s_i^{(K_i)}\}.$$

Згідно [12] рівновага у теорії ігор ґрунтується на припущенні про повну раціональність агентів. Тобто кожен учасник гри завжди обирає стратегію, яка збільшує його виграш. Відповідно, учасник ніколи не відхиляється від цього вибору. Однак у реальних умовах ринку, зокрема в електронній комерції [15], таке припущення є занадто жорстким. Підприємства приймають рішення в умовах неповної інформації. А українськи додатково ще мають обмежені ресурси та виску невизначеність. Це означає, що їхня поведінка лише наближено раціональна. Отже, закономірними є відхилення від оптимальних стратегій учасників гри.

Саме тому, у модель, для адекватного врахування цього фактору ми ввели рівновагу Quantal Response (QRE) [16, 17, 18]. Наше припущення полягає в тому, що ймовірність вибору певної стратегії агентом зростає із зростанням очікуваного виграшу від цієї стратегії. Але не обмежується лише оптимальною дією. Тобто, QRE моделює ймовірнісну поведінку. При цьому субоптимальні дії мають ненульову ймовірність.

Вважаємо, що застосування QRE у нашій постановці має кілька переваг, зокрема:

Реалістичність. Оскільки цей показник відображає обмежену раціональність підприємств e-commerce (агентів) й допускає варіативність стратегічних рішень.

Гнучкість. Це впливає з потенції регулювати ступінь раціональності через параметр чутливості ("температуру") [17, 18]. При великих значеннях параметра поведінка стає майже детермінованою. Тобто вона наближається до рівноваги Неша. Своєю чергою, при малих більш випадкова.

Диференційовність. Тобто рівновага QRE [18] описується гладкою функцією. Це, відповідно робить її придатною для інтеграції у машинно-навчальні алгоритми. Також стає у нагоді використати методи градієнтної оптимізації.

Робастність. Тобто доцільно в програмній реалізації, яку ми розглянемо далі, виконати згладжування вибору стратегій. А це дозволить нам при обчислювальних експериментах запобігти нестабільності та різким стрибкам. Зазначимо, що такі стрибки, зазвичай притаманні моделюванню із жорсткою оптимізацією стратегій гри.

Тоді, згідно [18] матиме наступну залежність для QRE:

$$\pi_{i,t}(k) = \frac{\exp\{\lambda \cdot U_{i,t}(s_i^{(k)}, s_{-i,t}; \theta, G_t)\}}{\sum_{m=1}^{K_i} \exp\{\lambda \cdot U_{i,t}(s_i^{(m)}, s_{-i,t}; \theta, G_t)\}}, k = 1, \dots, K_i, \quad (12)$$

де $\pi_{i,t}(k) \in (0,1)$ – ймовірність вибору дискретної стратегії $s_i^{(k)}$; $\lambda > 0$ – параметр раціональності стратегії; $s_{-i,t}$ – профіль стратегій конкурентів.

Тоді очікувану стратегію запишемо так:

$$\bar{s}_{i,t} = \sum_{k=1}^{K_i} \pi_{i,t}(k) \cdot s_i^{(k)}, \quad (13)$$

де $\bar{s}_{i,t} \in \text{conv}(S_i^{(h)})$ – математичне сподівання за QRE.

Модель рівноваги стратегічної взаємодії підприємств дозволяє нам описати, як агенти обирають свої оптимальні дії з урахуванням витрат, виграшів та мережевих ефектів. Проте сама по собі рівновага не дає прямої відповіді на ключове питання



дослідження – як оцінити рівень конкурентоспроможності кожного підприємства у системі.

Саме тому для розв'язання цього завдання введемо в модель спеціальний показник, який узагальнює та поєднує результати рішень агентів, див. вираз 1. Це стосується їхньої позиції у мережевій структурі G_t та здатності до розвитку. Такий показник виконує подвійну функцію. По перше, він забезпечує кількісне порівняння підприємств у рамках моделі. А по друге слугує інструментом прогнозування, планування та управлінського аналізу.

У науковій літературі [1-20] викладено декілька підходів до вимірювання конкурентоспроможності. Проте, як показано у [19-25], переважна частина із них обмежена або фінансовими метриками (як-то, у [19-22] прибутковістю чи часткою ринку), або, як у [23-25] якісними експертними оцінками. Тому у нашій моделі пропонуємо інтегрований підхід. Це передбачає та враховує: економічний результат (очікуваний прибуток у рівновазі); значущість агента у мережі взаємодій G_t . Це його структурна вага та вплив на систему в цілому; робастність стратегії до збурень і невизначеностей; потенціал, пов'язаний із інвестиціями у R&D.

Вважаємо, що синергія цих складових дозволяє у підсумку за допомогою кібернетичних інструментів сформувати індекс конкурентоспроможності. Такий індекс, не лише відобразить поточний стан підприємства e-commerce, але й у довгостроковій перспективі продемонструє здатність підприємства до сталого розвитку.

Враховуючи цей кут погляду, у виразах (14 – 18), введемо формальне визначення цього індексу. Також продемонструємо, як він пов'язаний із раніше визначеними функціями виграшу (9), мережевою структурою G_t та стратегічними параметрами агентів (1). Це підсумковий крок формалізації нашої моделі. Він забезпечує місток до емпіричних досліджень і прикладних експериментів за допомогою кібернетичного інструментарію. Отже, на підставі [19-25] визначимо індекс конкурентоспроможності агента i у момент t так:

$$CS_{i,t} = w_{i,t}^{(crit)} \mathbb{E}[P_{i,t}(s_t^*)] + \lambda_{rob} \cdot Robust_{i,t} + \xi \cdot Innov_{i,t}, \quad (14)$$

де $CS_{i,t} \in \mathbb{R}$ – індекс конкурентоспроможності; $w_{i,t}^{(crit)} \in \mathbb{R}_+$ – вага критичності вузла у мережі G_t ; $P_{i,t}$ – метрика результату (прибуток/маржа; далі покладемо $P_{i,t} = U_{i,t}$; $\lambda_{rob} \geq 0$ – вага робастної складової; $Robust_{i,t} \in \mathbb{R}$ – показник стійкості до збурень; $\xi \geq 0$ – вага інноваційної складової. Тобто інноваційний потенціал розглядаємо не лише як допоміжний ефект стратегії агента, а як незалежний вимір конкурентоспроможності. Він згідно [25] у довгостроковій перспективі впливає на стійкість й розвиток підприємства e-commerce; $Innov_{i,t} \in \mathbb{R}$ – показник інноваційності.

У нашій моделі цей показник включається до формули (15) як один із компонентів індексу конкурентоспроможності. Це забезпечує урахування не лише індивідуальних характеристик підприємства (прибутковість, інноваційність), але й його структурної ролі у ринковій екосистемі. Таким чином, конкурентоспроможність визначається не тільки внутрішніми стратегіями агента у мережі G_t . Але й його здатністю впливати на інших учасників мережі та отримувати вигоди від мережевих взаємозв'язків.

$$c_{i,t} = \frac{1}{\rho_t} \cdot \sum_{j=1}^N w_{ij,t} \cdot c_{j,t}, \quad c_{i,t} > 0, \quad \sum_{i=1}^N c_{i,t} = 1, \quad (15)$$

де $c_{i,t}$ – власна центральність вузла i ; ρ_t – найбільше власне значення матриці $W_t = [w_{ij,t}] \in \mathbb{R}_+^{N \times N}$.

Наша ідея полягає в наступному. Підприємство у структурі G_t вважається тим більш впливовим, чим сильніше воно пов'язане з іншими впливовими учасниками ринку.

Тобто, власну центральність визначаємо як розв'язок спектральної задачі для матриці суміжності A , якою описуємо взаємодії у мережі G_t : $\alpha \cdot c_i = \sum_j A_{ij} \cdot c_j$, де A_{ij} – вага зв'язку між вузлами i та j ; α – найбільше власне значення матриці A .

Тоді нормовану вагу критичності подаємо так:

$$w_{i,t}^{(crit)} = \frac{c_{i,t}}{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N c_{i,t}} = N c_{i,t}, \quad (16)$$

де права рівність у (16) випливає з нормування $\sum_i c_{i,t} = 1$.

Далі оцінимо найгірший лінійний вплив малих збурень ваг графа G_t . Тобто ΔW_t з $\|\Delta W_t\|_F \leq \varepsilon$. Тоді локальна верхню межу подамо так:

$$Robust_{i,t} \approx -\varepsilon \|\nabla_{vec(W_t)} \Pi_{i,t}(s_t^*(W_t))\|_2, \quad (17)$$

де $\|\cdot\|_F$ – фробеніусова норма [32]; $\nabla_{vec(W_t)}$ – операція векторизації матриці. Градієнт обчислюємо через неявну залежність $s_t^*(W_t)$ від W_t . А знак «-» означає, що більша чутливість зменшує $Robust_{i,t}$.

Іншими словами залежність (17) надає нам спосіб нормалізації та інтеграції окремих складових індексу конкурентоспроможності у єдине значення. Наша ідея полягала в тому, що конкурентоспроможність підприємств e-commerce зазвичай формується не лише за рахунок одного показника (як-то, прибутковості - $\Pi_{i,t}$). Також на індекс конкурентоспроможності впливає результат поєднання кількох ключових факторів. Далі оцінуємо інноваційність темпом нарощування R&D:

$$Innov_{i,t} = r_{i,t} - r_{i,t-1}, \quad t \geq 2, \quad (18)$$

де $r_{i,t}$ – рівень інвестицій у R&D агента i у момент t .

Зауважимо, вираз (18) є не лише абсолютний рівень витрат на інновації у e-commerce. А також показником, того наскільки швидко компанія збільшує ці інвестиції з часом. Це дозволило при алгоритмізації та обчислювальних експериментах відрізнити підприємства, які просто підтримують базовий рівень технологій у e-commerce, від тих, які активно розширюють інноваційну діяльність.

Представимо вихідні змінні, прогноз та навчальну функція втрат. Нехай цільові спостереження $y_{i,t}$ – це фактичні виручки/частки/маржі підприємства e-commerce. Тоді покладемо прогноз у вигляді виразу (19);

$$\hat{y}_{i,t}(\theta) = g(s_t^*(\theta), x_{i,t}, G_t), \quad (19)$$

де $\hat{y}_{i,t}$ – прогнозована вихідна змінна; $g(\cdot)$ – відповідне відображення (як-то, $g \equiv R_{i,t}$ для виручки; $s_t^*(\theta)$ – рівноважна стратегія, яка залежить від параметрів θ).

Відповідно, тоді визначимо зважену функцію втрат із урахуванням критичності та рідкісності шаблонів даних:

$$\begin{aligned} L(\theta) = & \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^N w_{i,t}^{(crit)} l(\hat{y}_{i,t}(\theta), y_{i,t}) + \\ & + \lambda_{rare} \sum_{t,i} \rho_{i,t} \|s_t^*(\theta) - s_t^{(bench)}\|_2^2 + \\ & + \lambda_{eq} \sum_t \Phi(s_t^*(\theta)), \end{aligned} \quad (20)$$

де $l(\cdot)$ – основна похибка (MSE або лог-втрата; λ_{rare} , λ_{eq} – ваги регуляризацій; $\rho_{i,t} \in \mathbb{R}_+$ – ваги рідкісності шаблонів даних для розрахунків та моделювання).

Зауважимо, що релевантні методи МН та ШІ надають дослідникам інструментарій для оптимізації навчальної функції втрат. Це дозволить на наступному кроці

дослідження максимально наблизити представлений у математичний виклад до емпіричних даних підприємств e-commerce.

РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ

На підставі викладеної моделі розроблено детальну блок-схему алгоритму навчання моделі оцінки конкурентоспроможності агентів, див. рис. 1.

Зазначмо, що умова зупинки у блок-схемі на рис. 1, це – ключовий елемент алгоритму навчання. Саме умова зупинки визначає момент, коли ітераційний процес оптимізації завершується. Для моделі (1) – (20) критерії сформульовано наступним чином: якщо зміна параметрів моделі (1) – (20) між двома ітераціями стає меншою за заданий поріг ε див. (16) $\|\Delta W_t\|_F \leq \varepsilon$, вважаємо, що навчання досягло стабільного стану. Окрім того, досягнена максимальна кількість епох. Тобто, якщо алгоритм на рис. 1 досягнув заздалегідь визначеної кількості проходів по всіх даних (епох), процес зупиняється незалежно від точності.

Також окремо для обчислювальних експериментів використовувалась наступна умова. Це так звана валідаційна похибка. Інакше кажучи, у разі використання відкладеної вибірки навчання зупинялось, якщо похибка на валідаційних даних не зменшувалась.



Рис. 1 – Блок-схема алгоритму навчання моделі оцінки конкурентоспроможності агентів

Джерело: Розроблено автором



Псевдокод, наведений далі, дає можливість описати ключові обчислювальні кроки уніфіковано. Не потрібна прив'язка до конкретної мови програмування. У статті псевдокод наведемо у стилі, близькому до стандарту IEEE Standard 610.12 та підходу запропонованого Корменом (CLRS).

Розроблений псевдокод:

```
1: procedure TrainingCompetitivenessModel(Data, MaxEpochs,  $\varepsilon$ , ValSet)
2:   Initialize parameters  $\theta \leftarrow \theta_0$ 
3:   epoch  $\leftarrow 0$ 
4:   best_val_loss  $\leftarrow \infty$ 
5:   while epoch < MaxEpochs do
6:     Compute competitiveness index  $I(\theta)$  on Data
7:     Predict target variables  $\hat{y}(\theta)$ 
8:     Compute loss  $L \leftarrow \text{Loss}(\hat{y}(\theta), y)$ 
9:     if  $|\Delta\theta| < \varepsilon$  then
10:      break  $\triangleright$  convergence criterion
11:    end if
12:    if ValSet  $\neq \emptyset$  then
13:      Compute validation loss  $L_{\text{val}}$ 
14:      if  $L_{\text{val}} > \text{best\_val\_loss}$  then
15:        break  $\triangleright$  early stopping criterion
16:      else
17:        best_val_loss  $\leftarrow L_{\text{val}}$ 
18:      end if
19:    end if
20:    Update parameters  $\theta \leftarrow \theta - \eta \nabla L \triangleright$  gradient step with learning rate  $\eta$ 
21:    epoch  $\leftarrow$  epoch + 1
22:  end while
23:  return  $\theta, I(\theta), \hat{y}(\theta)$ 
24: end procedure
```

Отже, наукова новизна моделі ґрунтується на інтеграції концепцій теорії ігор, мережевого аналізу та МН в єдиний формалізований підхід до оцінки конкурентоспроможності підприємств у сфері e-commerce.

ВИСНОВКИ ТА ПЕРСПЕКТИВИ ПОДАЛЬШИХ ДОСЛІДЖЕНЬ

У ході дослідження отримано такі результати.

Розроблено комплексну модель ігрової взаємодії, яка дозволяє проводити поглиблений аналіз та оцінку конкурентоспроможності підприємств e-commerce. Модель об'єднує апарат теорії ігор для опису стратегічної поведінки, мережевий аналіз для врахування структурних взаємозв'язків та методи машинного навчання для адаптації моделі до емпіричних даних. Наукова новизна підходу полягає у синергії цих концепцій, що дозволяє вийти за межі класичних статичних моделей.

Запропоновано новий інтегрований індекс конкурентоспроможності, який на відміну від існуючих підходів, враховує не лише поточний прибуток, але й структурний вплив агента в мережі, його здатність протистояти ринковим збуренням та довгостроковий потенціал, пов'язаний з інвестиціями в R&D.

Вперше для такого класу задач модель враховує обмежену раціональність агентів через механізм Quantal Response Equilibrium (QRE). Це дозволило описати процес ухвалення рішень компаніями, які діють в умовах неповної інформації та допускають відхилення від оптимальних стратегій.



Розроблено та представлено у вигляді блок-схеми та псевдокоду алгоритм навчання моделі. Це перетворює її з теоретичної конструкції на практичний інструмент для прогнозування, сценарного аналізу та підтримки управлінських рішень підприємств e-commerce.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Nana, Z., Xiujian, W., & Zhongqiu, Z. (2022). Game theory analysis on credit risk assessment in E-commerce. *Information Processing & Management*, 59(1), 102763. <https://doi.org/10.1016/j.ipm.2021.102763>
2. Qiu, Z., Yin, Y., Yuan, Y., & Chen, Y. (2024). Research on credit regulation mechanism of e-commerce platform based on evolutionary game theory. *Journal of Systems Science and Systems Engineering*. <https://doi.org/10.1007/s11518-024-5603-2>
3. Giocoli, N. (2003). *Modeling rational agents: From interwar economics to early modern game theory*. Edward Elgar Publishing.
4. Dekel, E., & Gul, F. (1997). Rationality and knowledge in game theory. *Econometric Society Monographs*, 26, 87–172.
5. Aringhieri, R., Duma, D., & Fragnelli, V. (2018). Modeling the rational behavior of individuals on an e-commerce system. *Operations Research Perspectives*, 5, 22–31. <https://doi.org/10.1016/j.orp.2017.12.001>
6. Ghanbari, M., Keshavarz, T., & Shakhshi-Niaei, M. (2000). Modeling the rational behavior of buyers and sellers in an e-commerce system using agent-based simulation. *Journal of International Business Administration*, 6(4), 81–101. <https://doi.org/10.22034/jiba.2023.55336.2011>
7. Barabash O. V., Haidur H. I., Dakhno N. B., & Shevchenko H. V. (2017). Mathematical model of the network equilibrium for the case of competition in the conditions of incomplete awareness. *Telecommunication and information technologies*, (4), 11–21. <https://tit.duikt.edu.ua/index.php/telecommunication/article/view/1756>
8. Bohatyr, O. I., Boliun, O. H., & Silvestrov, A. M. (2007). EE-commerce – instrument of optimization of the system producer-intermediary-consumer. *Adaptive Systems of Automatic Control*, (11), 86–92. <https://doi.org/10.20535/1560-8956.11.2007.34166>
9. Xie, Y., Ye, H.-Q., & Zhu, W. (2025). Prediction and optimization for multi-product marketing resource allocation in cross-border e-commerce. *Journal of Theoretical and Applied Electronic Commerce Research*, 20(2), 124. <https://doi.org/10.3390/jtaer20020124>
10. Vennila, D., Vinotha, C., Shanthakumari, A., & Thangapalani, L. Convex Optimization Algorithm for Product Recommendation Using Microblogging Information. *Journal of Data Mining and Management*, 2(1).
11. Shiyan, A. A. (2010). *Management of the development of socio-economic systems: Game theory: basics and applications in economics and management*. Vinnytsia: VNTU. https://pdf.lib.vntu.edu.ua/books/2024/LANZ/Shiyan_2011_162.pdf
12. Hladkova, L. A., & Naumova, M. A. (2013). Zastosuvannia teorii ihor v ekonomitsi [Application of game theory in economics]. *Naukovi zapysky. Seriya: Problemy metodyky fizyko-matematychnoi i tekhnolohichnoi osvity*, 2(4), 16–21. <https://phm.cuspu.edu.ua/ojs/index.php/NZ-PMFMT0/article/view/367>
13. Tkachuk, M. M., Hrechka, I., Tkachuk, M. A., Sierykov, V., Grabovskiy, A., Pinchuk, N., Tkachuk, H., Klochkov, I., Tsendra, H., Shevchenko, A., Kyrychuk, V., & Friziuk, D. (2023). Integrated calculation and experimental technology for analysis of contact interaction with account of elastic intermediate layer. *Bulletin of the National Technical University «KhPI» Series: Engineering and CAD*, (1), 131–151. <https://doi.org/10.20998/2079-0775.2023.1.13>
14. Oleshko T.I., Lobanov M.O. (2018). Economic problem in game theory. *Problems of systemic approach in the economy*, 3(65), 120–124.
15. Shchytyov, D. M., Mormul, M. F., & Shchytyov, O. M. (2024). Ryzyky v elektronni komertsii [Risks in e-commerce]. In *Svit naukovykh doslidzhen: Vol. 35. Materialy Mizhnarodnoi multydystrylinarnoi naukovoï internet-konferentsii* (pp. 66–71). HO “Naukova spilnota”, WSZIA w Opolu. <https://www.economy-confer.com.ua/full-article/5833/>
16. Zhukova, D. A. (2016). Analysis of the models of strategic choice making for company. *Problems and prospects of economics and management*, 4(8), 30–37. <http://ppeu.stu.cn.ua/article/view/97536>



17. Wang, P., Cao, H., Li, P., Wang, Y., Chu, Y., Liao, T., ... & Liu, G. (2024). Quantum representation based preference evolution network for e-commerce recommendation. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 654, 130155. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2024.130155>
18. Goeree, J. K., Holt, C. A., & Pfaffrey, T. R. (2016). *Quantal Response Equilibrium: A Stochastic Theory of Games*. Princeton University Press. <https://doi.org/10.23943/princeton/9780691124230.001.0001>
19. Khurana, R. (2022). Applications of quantum computing in telecom e-commerce: Analysis of qkd, qaoa, and qml for data encryption, speed optimization, and ai-driven customer experience. *Quarterly Journal of Emerging Technologies and Innovations*, 7(9), 1–15. <https://vectoral.org/index.php/QJETI/article/view/162>
20. Durand, M., & Giorno, C. (1987). Indicators of international competitiveness: conceptual aspects and evaluation. *OECD economic studies*, 9(3), 147–183.
21. Peneder, M., & Rammer, C. (2018). Measuring competitiveness. <https://hdl.handle.net/10419/181906>
22. Dobrovic, J., Gallo, P., Mihalcova, B., Stofova, L., & Szaryszova, P. (2018). Competitiveness measurement in terms of the Europe 2020 strategy. *Journal of competitiveness*, 10(4), 21–37. <https://doi.org/10.7441/joc.2018.04.02>
23. Febransyah, A., & Camelia Goni, J. I. (2022). Measuring the supply chain competitiveness of e-commerce industry in Indonesia. *Competitiveness Review: An International Business Journal*, 32(2), 250–275. <https://doi.org/10.1108/CR-05-2020-0059>
24. Hristoski, I., Kostoska, O., Kotevski, Z., & Dimovski, T. (2017). Factors affecting the competitiveness of e-commerce firms: A critical appraisal. In *Proceedings of the Third International Balkan and Near Eastern Social Sciences Conference (IBANESS)* (pp. 1079–1090). Edirne, Turkey.
25. Sahin, C. (2012). Competitiveness of E-Commerce companies: an integrated approach. *International Journal of Ebusiness and Egovernment Studies*, 4(1), 13–22.
26. Bandyopadhyay, S., Thakur, S. S., & Mandal, J. K. (2021). Product recommendation for e-commerce business by applying principal component analysis (PCA) and K-means clustering: benefit for the society. *Innovations in Systems and Software Engineering*, 17(1), 45–53. <https://doi.org/10.1007/s11334-020-00372-5>
27. Huang, M., & Lian, J. (2023). Research on the application of multi-objective algorithm based on tag eigenvalues in e-commerce supply chain forecasting. *International Journal of Advanced Computer Science and Applications*, 14(8). <https://dx.doi.org/10.14569/IJACSA.2023.0140897>
28. Kasumov, T. A. (2025). Marketplaces in Ukraine in the conditions of digital metamorphoses: trends, challenges and strategic guidelines. *Journal of Strategic Economic Research*, (6), 64–78. <https://doi.org/10.30857/2786-5398.2024.6.7>
29. Shchytyov, D. M., Zhadko, K. S., & Mormul, M. F. (2024). The structure of Ukrainian product e-commerce. *Efektivna Ekonomika*, (9), 24–33. <https://doi.org/10.32702/2307-2105.2024.9.7>
30. Kuzmenko, I. M. (2020). *Graph theory*. NTUU “Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute”. <https://ela.kpi.ua/handle/123456789/35854>
31. Abramov, V., Astafieva, M., Boiko, M., Bodnenko, D., Bushma, A., Vember, V., Hlushak, O., Zhyltsov, O., Ilich, L., Kobets, N., Kovaliuk, T., Kuchakovska, H., Lytvyn, O., Lytvyn, P., Mashkina, I., Morze, N., Nosenko, T., Proshkin, V., Radchenko, S., & Yaskevych, V. (2021). Theoretical and practical aspects of the use of mathematical methods and information technology in education and science. <https://doi.org/10.28925/9720213284km>
32. Spektorskyi, I. Ya. (2004). *Discrete mathematics*. NTUU “KPI”. <https://ela.kpi.ua/handle/123456789/62016>

**Oleksandr Kharchenko**

Associate Professor at the Department of Software Engineering and Cybersecurity

State University of Trade and Economics, Kyiv, Ukraine

ORCID: 0000-0002-9255-9287

a.kharchenko@knute.edu.ua

Valentyn Yaremych

Postgraduate student of specialty 122 "Computer science"

State University of Trade and Economics, Kyiv, Ukraine

ORCID: 0000-0001-9557-9577

v.yaremych@knute.edu.ua

A GAME-THEORETIC MODEL OF THE INTERACTION OF E-COMMERCE ENTERPRISES UNDER NETWORK EXTERNALITIES

Abstract. The article presents a comprehensive model of the game-theoretic interaction of enterprises in the e-commerce market. The model functions under conditions of network externalities. The relevance of the study is due to the saturation of the e-commerce market with IT solutions and many interconnected participants. This requires the development of flexible and realistic tools for cybernetic modeling and competitiveness analysis. The main element of the model is the integration of game theory and machine learning (ML) methods. Unlike common classical models based on the assumption of perfect rationality of players, the study applies the concept of bounded rationality through the mechanism of probabilistic strategies of Quantal Response Equilibrium (QRE). The proposed approach made it possible to adequately model the behavior of e-commerce companies, since these companies strive for profit but make decisions under conditions of incomplete information and limited resources. These constraints a priori make their actions not always optimal. Each enterprise is considered as an agent. The agent in the model chooses a strategy vector that includes price, quality, marketing intensity, and investment in R&D. The scientific novelty of the model lies in the formalization and combination of several key parameters. First, an integrated competitiveness index ($CS_{i,t}$), was developed, which, unlike classical financial metrics, takes into account the synergy of four factors: economic result (expected profit), the structural significance of the enterprise in the interaction network (criticality weight), the robustness of its strategy to market disturbances, and innovation potential. The latter was evaluated by the dynamics of R&D investment. Second, the equilibrium state in the system is described not by the classical Nash equilibrium but through the more general apparatus of variational inequalities. This made it possible to correctly consider convex cost functions and regularization elements. Third, the application of machine learning algorithms made it possible to calibrate the model parameters based on empirical data. This turns the model into a tool for forecasting and managerial analysis of companies in the e-commerce market. A training algorithm for the model was developed and presented in the form of a flowchart and pseudocode.

Keywords: e-commerce; game theory; machine learning; competitiveness; competitiveness index; bounded rationality; Quantal Response Equilibrium (QRE); mathematical model.

REFERENCES (TRANSLATED AND TRANSLITERATED)

1. Nana, Z., Xiujian, W., & Zhongqiu, Z. (2022). Game theory analysis on credit risk assessment in E-commerce. *Information Processing & Management*, 59(1), 102763. <https://doi.org/10.1016/j.ipm.2021.102763>
2. Qiu, Z., Yin, Y., Yuan, Y., & Chen, Y. (2024). Research on credit regulation mechanism of e-commerce platform based on evolutionary game theory. *Journal of Systems Science and Systems Engineering*. <https://doi.org/10.1007/s11518-024-5603-2>
3. Giocoli, N. (2003). *Modeling rational agents: From interwar economics to early modern game theory*. Edward Elgar Publishing.



4. Dekel, E., & Gul, F. (1997). Rationality and knowledge in game theory. *Econometric Society Monographs*, 26, 87–172.
5. Aringhieri, R., Duma, D., & Fragnelli, V. (2018). Modeling the rational behavior of individuals on an e-commerce system. *Operations Research Perspectives*, 5, 22–31. <https://doi.org/10.1016/j.orp.2017.12.001>
6. Ghanbari, M., Keshavarz, T., & Shakhisi-Niaei, M. (2000). Modeling the rational behavior of buyers and sellers in an e-commerce system using agent-based simulation. *Journal of International Business Administration*, 6(4), 81–101. <https://doi.org/10.22034/jiba.2023.55336.2011>
7. Barabash O. V., Haidur H. I., Dakhno N. B., & Shevchenko H. V. (2017). Mathematical model of the network equilibrium for the case of competition in the conditions of incomplete awareness. *Telecommunication and information technologies*, (4), 11–21. <https://tit.duikt.edu.ua/index.php/telecommunication/article/view/1756>
8. Bohaty, O. I., Boliun, O. H., & Silvestrov, A. M. (2007). EE-commerce – instrument of optimization of the system producer-intermediary-consumer. *Adaptive Systems of Automatic Control*, (11), 86–92. <https://doi.org/10.20535/1560-8956.11.2007.34166>
9. Xie, Y., Ye, H.-Q., & Zhu, W. (2025). Prediction and optimization for multi-product marketing resource allocation in cross-border e-commerce. *Journal of Theoretical and Applied Electronic Commerce Research*, 20(2), 124. <https://doi.org/10.3390/jtaer20020124>
10. Vennila, D., Vinotha, C., Shanthakumari, A., & Thangapalani, L. Convex Optimization Algorithm for Product Recommendation Using Microblogging Information. *Journal of Data Mining and Management*, 2(1).
11. Shiyan, A. A. (2010). *Management of the development of socio-economic systems: Game theory: basics and applications in economics and management*. Vinnytsia: VNTU. https://pdf.lib.vntu.edu.ua/books/2024/LANZ/Shiyan_2011_162.pdf
12. Hladkova, L. A., & Naumova, M. A. (2013). Zastosuvannia teorii ihor v ekonomitsi [Application of game theory in economics]. *Naukovi zapysky. Seriya: Problemy metodyky fizyko-matematychnoi i tekhnolohichnoi osvity*, 2(4), 16–21. <https://phm.cuspu.edu.ua/ojs/index.php/NZ-PMFMTO/article/view/367>
13. Tkachuk, M. M., Hrechka, I., Tkachuk, M. A., Sierykov, V., Grabovskiy, A., Pinchuk, N., Tkachuk, H., Klochkov, I., Tsendra, H., Shevchenko, A., Kyrychuk, V., & Friziuk, D. (2023). Integrated calculation and experimental technology for analysis of contact interaction with account of elastic intermediate layer. *Bulletin of the National Technical University «KhPI» Series: Engineering and CAD*, (1), 131–151. <https://doi.org/10.20998/2079-0775.2023.1.13>
14. Oleshko T.I., Lobanov M.O. (2018). Economic problem in game theory. *Problems of systemic approach in the economy*, 3(65), 120–124.
15. Shchytyov, D. M., Mormul, M. F., & Shchytyov, O. M. (2024). Ryzyky v elektronni komertsii [Risks in e-commerce]. In *Svit naukovykh doslidzhen: Vol. 35. Materialy Mizhnarodnoi multydystrylinarnoi naukovoï internet-konferentsii* (pp. 66–71). HO “Naukova spilnota”, WSZIA w Opolu. <https://www.economy-confer.com.ua/full-article/5833/>
16. Zhukova, D. A. (2016). Analysis of the models of strategic choice making for company. *Problems and prospects of economics and management*, 4(8), 30–37. <http://ppeu.stu.cn.ua/article/view/97536>
17. Wang, P., Cao, H., Li, P., Wang, Y., Chu, Y., Liao, T., ... & Liu, G. (2024). Quantum representation based preference evolution network for e-commerce recommendation. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 654, 130155. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2024.130155>
18. Goeree, J. K., Holt, C. A., & Pfaffrey, T. R. (2016). *Quantal Response Equilibrium: A Stochastic Theory of Games*. Princeton University Press. <https://doi.org/10.23943/princeton/9780691124230.001.0001>
19. Khurana, R. (2022). Applications of quantum computing in telecom e-commerce: Analysis of qkd, qaoa, and qml for data encryption, speed optimization, and ai-driven customer experience. *Quarterly Journal of Emerging Technologies and Innovations*, 7(9), 1–15. <https://vectoral.org/index.php/QJETI/article/view/162>
20. Durand, M., & Giorno, C. (1987). Indicators of international competitiveness: conceptual aspects and evaluation. *OECD economic studies*, 9(3), 147–183.
21. Peneder, M., & Rammer, C. (2018). Measuring competitiveness. <https://hdl.handle.net/10419/181906>
22. Dobrovic, J., Gallo, P., Mihalcova, B., Stofova, L., & Szaryszova, P. (2018). Competitiveness measurement in terms of the Europe 2020 strategy. *Journal of competitiveness*, 10(4), 21–37. <https://doi.org/10.7441/joc.2018.04.02>
23. Febransyah, A., & Camelia Goni, J. I. (2022). Measuring the supply chain competitiveness of e-commerce industry in Indonesia. *Competitiveness Review: An International Business Journal*, 32(2), 250–275. <https://doi.org/10.1108/CR-05-2020-0059>



24. Hristoski, I., Kostoska, O., Kotevski, Z., & Dimovski, T. (2017). Factors affecting the competitiveness of e-commerce firms: A critical appraisal. In *Proceedings of the Third International Balkan and Near Eastern Social Sciences Conference (IBANESS)* (pp. 1079–1090). Edirne, Turkey.
25. Sahin, C. (2012). Competitiveness of E-Commerce companies: an integrated approach. *International Journal of Ebusiness and Egovernment Studies*, 4(1), 13–22.
26. Bandyopadhyay, S., Thakur, S. S., & Mandal, J. K. (2021). Product recommendation for e-commerce business by applying principal component analysis (PCA) and K-means clustering: benefit for the society. *Innovations in Systems and Software Engineering*, 17(1), 45–53. <https://doi.org/10.1007/s11334-020-00372-5>
27. Huang, M., & Lian, J. (2023). Research on the application of multi-objective algorithm based on tag eigenvalues in e-commerce supply chain forecasting. *International Journal of Advanced Computer Science and Applications*, 14(8). <https://dx.doi.org/10.14569/IJACSA.2023.0140897>
28. Kasumov, T. A. (2025). Marketplaces in Ukraine in the conditions of digital metamorphoses: trends, challenges and strategic guidelines. *Journal of Strategic Economic Research*, (6), 64–78. <https://doi.org/10.30857/2786-5398.2024.6.7>
29. Shchytov, D. M., Zhadko, K. S., & Mormul, M. F. (2024). The structure of Ukrainian product e-commerce. *Efektivna Ekonomika*, (9), 24–33. <https://doi.org/10.32702/2307-2105.2024.9.7>
30. Kuzmenko, I. M. (2020). *Graph theory*. NTUU “Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute”. <https://ela.kpi.ua/handle/123456789/35854>
31. Abramov, V., Astafieva, M., Boiko, M., Bodnenko, D., Bushma, A., Vember, V., Hlushak, O., Zhyltsov, O., Ilich, L., Kobets, N., Kovaliuk, T., Kuchakovska, H., Lytvyn, O., Lytvyn, P., Mashkina, I., Morze, N., Nosenko, T., Proshkin, V., Radchenko, S., & Yaskevych, V. (2021). Theoretical and practical aspects of the use of mathematical methods and information technology in education and science. <https://doi.org/10.28925/9720213284km>
32. Spektorskyi, I. Ya. (2004). *Discrete mathematics*. NTUU “KPI”. <https://ela.kpi.ua/handle/123456789/62016>

